# Programme de colle n°15

semaine du 19 au 23 janvier

## Notions vues en cours

**Chapitre 19 : Structures algébriques** (suite et fin)

- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- Noyau et image d'un morphisme, notations $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, ce sont des sous-groupes, caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité
- Loi produit, groupe produit, élément neutre et symétrique d'un élément dans un groupe produit
- Anneau, anneau commutatif, notations $0_A$ et $1_A$ pour les éléments neutres de $+$ et $\times$ respectivement. L'élément opposé de $a$ est noté $-a$, et si $a$ est un élément inversible, l'élément inverse de $a$ est noté $a^{-1}$
- Anneaux usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ munis de $+$ et $\times$
- Sous-anneau : définition, caractérisation
- Calcul dans un anneau : $0_A a = 0_A a = 0_A$, distributivité de $\times$ sur $-$, formules de $(a+b)^n$ et de $a^n - b^n$ sous réserve que $ab = ba$
- Morphisme d'anneaux : définition, iso- / endo- / automorphisme
- L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ est un groupe pour la loi $\times$, ce groupe pourra être noté $\mathrm{Inv}(A)$
- Si $a$ et $b$ sont des éléments inversibles d'un anneau $A$, on a $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ et $(a^{-1})^{-1} = a$, un élément inversible est régulier
- Diviseur de zéro, anneau intègre, tout élément non nul d'un anneau intègre est régulier
- Corps, tout corps est un anneau intègre, hors-programme : définition et caractérisation de sous-corps

**Chapitre 20 : Calcul matriciel**

- Matrice de taille $(n, p)$, ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, coefficient d'indice $(i, j)$ de $A$, on peut le noter $A_{ij}$ ou $\left[A\right]_{ij}$
- Matrice ligne / colonne / carrée, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, relation d'égalité dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- **Somme de matrice**, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien, l'élément neutre pour $+$ est la matrice nulle notée $0_{n,p}$, multiplication d'une matrice par un scalaire
- **Produit de matrices** : c'est une application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, formule pour $\left[AB\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de $A$ et $B$, associativité et bilinéarité du produit
- Symbole de Kronecker $\delta_{ij}$, matrice élémentaire (notation $E^{k\ell}$), formule $E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{jk}E^{i\ell}$
- Matrice diagonale, matrice triangulaire, matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), notations $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Le produit de matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, resp. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, est une matrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, resp. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et la diagonale du produit est le produit terme à terme des diagonales
- Formules $(A+B)^n$ et $A^n - B^n$ pour des matrices $A$ et $B$ qui commutent
- **Puissance $k$-ième d'une matrice carrée** avec $k \in \mathbb{N}$, vu en TD : calcul d'une puissance $k$-ième en conjecturant une formule qu'on montre par récurrence

*La notion de matrice inverse n'est pas au programme cette semaine.*

**Les questions de cours sont en page suivante**

## Questions de cours

**Question Flash.** Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **17 à 19**).

**Question Longue.** *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.* ***Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe Chapitre 19, Théorème 19.21 item 2
2. Définition du produit de deux matrices : on exprimera $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de $A$ et de $B$. Puis associativité du produit matriciel Chapitre 20, Définition 20.6 et Théorème 20.7
3. Calcul d'une puissance $k$-ième d'une matrice $A$ donnée par l'examinateur. La matrice $A$ sera de la forme $\lambda I_n + B$ avec $B$ une matrice triangulaire de diagonale nulle, typiquement comme la matrice $A$ de l'exercice 4 du TD 20.

**Questions Flash au programme :**

Chapitre 19 :

- Soit $\top$ une l.c.i. sur $E$ et $e \in E$. Que doit vérifier $e$ pour être un élément neutre pour $\top$ ?
- Soit $\top$ une l.c.i. sur $E$ et $x \in E$. Que doit vérifier $x$ pour être symétrisable pour $\top$ ?
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérifier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$. Donner une caractérisation de "$H$ est un sous-groupe de $G$".
- Soit $(G, \top)$ et $(G', \perp)$ deux groupes et $f : G \to G'$. Que doit vérifier $f$ pour être un morphisme ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Soit $f$ un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de $f$. À quelle condition sur le noyau est-ce que $f$ est injective ?
- Soit $f$ un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation de l'image de $f$. À quelle condition sur l'image est-ce que $f$ est surjective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "$B$ est un sous-anneau de $A$"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ? Puis oralement : un endomorphisme ? un isomorphisme ? un automorphisme ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\text{Inv}(A)$) ?
- Que doit vérifier un anneau $(A, +, \times)$ pour être un anneau intègre ?
- Que doit-on vérifier pour que $(\mathbb{K}, +, \times)$ soit un corps ?

Chapitre 18 :

- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, que peut-on dire sur $a$ et $b$ ?
- Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le théorème de Bézout.
- Si $a \mid bc$, peut-on dire que $a \mid c$ ? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, peut-on dire que $a \wedge (bc) = 1$ ? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?

- Si $a \mid c$ et $b \mid c$, peut-on dire que $ab \mid c$ ? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que signifie “$a$ est inversible modulo $n$” ? Sous quelle condition est-ce que cela est vérifié ?
- Donner une relation simple qui fait intervenir $a \wedge b$ et $a \vee b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer le lemme d'Euclide.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier $n$ sous forme de facteurs premiers.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler une définition de la valuation $v_p(n)$ (deux définitions sont acceptées, cf 18.47).
- Donner une condition nécessaire et suffisante à $a \mid b$, qui fait intervenir les valuations $v_p(a)$ et $v_p(b)$. Et pour $a = b$ ?
- Compléter les formules suivantes : $v_p(ab) = \dots$ et $v_p(a \wedge b) = \dots$
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Chapitre 17 :

- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence sur $E$ ?
- Soit $x \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Donner la définition de la classe d'équivalence de $x$.
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Si $x\mathcal{R}y$, que peut-on dire des classes d'équivalence de $x$ et $y$ ?
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$ avec trois classes d'équivalences distinctes $A, B, C$. Que peut-on dire sur $A$, $B$ et $C$ ?
- Soit $E$ un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre sur $E$ ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$. Que doit vérifier $\preceq$ pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$ et $A \subset E$. Que doit vérifier $A$ pour être bornée ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur $E$ et $A \subset E$. Que doit vérifier $M$ pour être le maximum de $A$ pour $\preceq$ ?